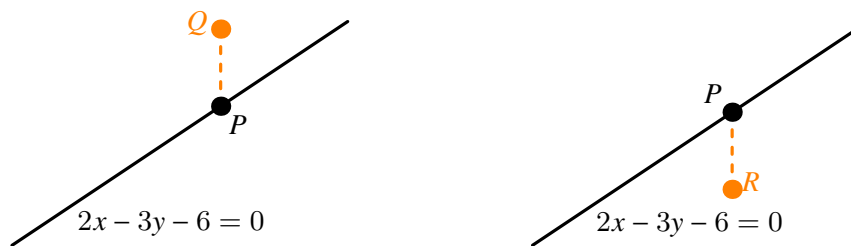


一次不等式的區域判斷

卓永鴻 提供

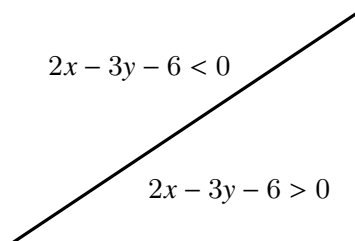
直線 $L: 2x - 3y - 6 = 0$ ，在 L 上取一點 P ，代入 $2x - 3y - 6$ ，因 P 在 L 上，所以代入後算出來為 0。

現在如果從 P 點出發，鉛直往上移動，來到 Q 點。因為我們是鉛直上移，所以 x 坐標不變，只有 y 坐標增加。而 $L: 2x - 3y - 6 = 0$ 中， y 的係數是負的，現在 y 坐標增加，整個算出來就會變小。本來將 P 代入 $2x - 3y - 6$ 為 0，現將 Q 點代入 $2x - 3y - 6$ 會由 0 再變小，便是負的。

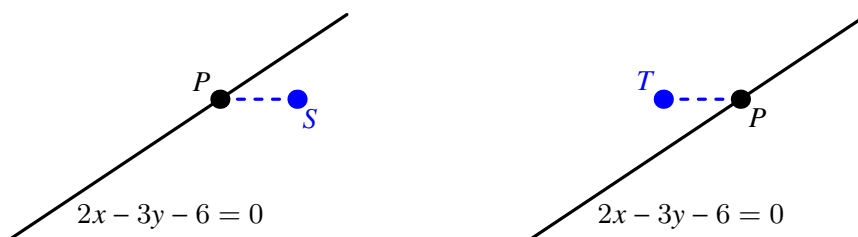


如果改由 P 點鉛直往下移動，來到 R 點。鉛直下移 x 坐標不變， y 坐標減少。因 y 的係數是負的，所以將 R 點代入 $2x - 3y - 6$ 會由 0 再變大，便是正的。

由以上討論，便可得出結論：



若是改水平往右移動，來到 S 點。水平右移 y 坐標不變， x 坐標增加。因 x 係數是正的，所以將 S 點代入 $2x - 3y - 6$ 會由 0 再變大，便是正的。



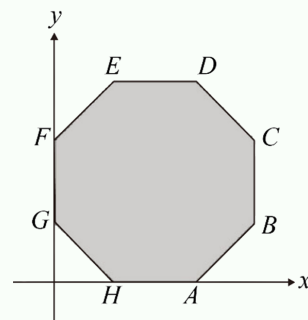
若是改水平往左移動，來到 T 點。水平右移 y 坐標不變， x 坐標減少。因 x 係數是正的，所以將 T 點代入 $2x - 3y - 6$ 會由 0 再變小，便是負的。

所以，不管是看鉛直移動，還是看水平移動，都可以得出正確的正負區域。

例題 1

一線性規劃問題的可行解區域為坐標平面上的正八邊形 $ABCDEFGH$ 及其內部，如右圖。已知目標函數 $ax + by + 3$ （其中 a, b 為實數）的最大值只發生在 B 點。請問當目標函數改為 $3 - bx - ay$ 時，最大值會發生在下列哪一點？

- (1) A (2) B (3) C
(4) D (5) E



104 學測

證

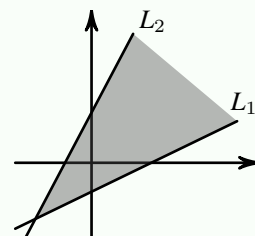
目標函數 $ax + by + 3$ 的最大值只發生在 B 點，可知斜率 $m = -\frac{a}{b} > 1$ 。

斜率大於 1 的直線最大值只發生在 B 點，表示越往右越大、越往下越大 $\Rightarrow a > 0, b < 0$
目標函數改為 $3 - bx - ay$ ，斜率 $m' = -\frac{b}{a} \Rightarrow 0 < m' < 1 \Rightarrow$ 極值會發生在 A 或 E 。由 $a > 0, b < 0$ ，可知極大值發生在 A 點。

例題 2

若 $\begin{cases} -2x + ay \geq -b \\ cx + dy \leq e \end{cases}$ 圖形如右，則下列選項何者為真？

- (A) $a > 0$ (B) $b > 0$ (C) $c > 0$
(D) $d > 0$ (E) $e > 0$



證

在 $-2x + ay \geq -b$ 中，我們不確定 a ，所以不看 y 方向。

x 的係數為負，故越往左越大，可知 $2x + ay \geq -b$ 是在 $-2x + ay = -b$ 的左方區域。

而觀察陰影區域在 L_2 的右方、 L_1 左方，所以 L_1 即為 $-2x + ay = -b$ 。

既然如此， y 方向來看， L_1 上方為正號區，則 $a > 0$ 。

且 $(0, 0)$ 位於正號區，代入得 $0 + 0 > -b \Rightarrow b > 0$ 。

對於 $L_2: cx + dy = e$ ， x 方向來看，右方為負號區，故 $c < 0$ ；

y 方向來看，下方為負號區，故 $d > 0$ 。

又 $(0, 0)$ 在負號區，代入得 $0 + 0 < e \Rightarrow e > 0$ 。