韓信點兵與拉格朗日插值法

卓永鴻
2019.08.05

19 世紀的偉大數學家高斯，他對自己做的數學有非常高的要求，未臻完美不輕易發表。於是經常有這樣的情況：其他也很厲害的數學家提出自己的工作，高斯便拿出自己的文章說他一二十年前就做出來了，而且做得更好。導致經常有傑出數學家吐血三升，甚至對高斯懷恨在心。

高斯在 1801 年發表《算術研究》(Disquisitiones Arithmeticae)，當中提出一個關於同餘的定理。後來 1874 年，德國科學史家馬蒂生，指出早在南北朝時《孫子算經》裡面就提出了等價的算法，比高斯早了一千多年。此後，這個定理就被稱為中國剩餘定理 (Chinese remainder theorem)。這下，高斯若天上有知，總算自己也嘗了一次這種滋味。

《孫子算經》中所提出的，是「物不知數」問題，俗稱「韓信點兵」，這是中國古代數學研究成果中極少數為世界所知曉的。這問題大概是說：有一正數除以三餘二、除以五餘三、除以七餘二，則此正數最小為多少？這類問題在舊課綱的高一數學課程中經常出現，許多老師所授解題方式千奇百怪，常令學生無所適從。然而觀察《孫子算經》的算法[①]，它其實是帶有比較樸素的一般性思想，先考慮幾個簡單的特殊情況，將這些特殊情況線性組合造出特解，再寫出通解。以今日的數學符號表述如下：首先解齊性方程

$$\begin{cases} x_h = 3q_1 + 0 \\ x_h = 5q_2 + 0 \\ x_h = 7q_3 + 0 \end{cases}$$

得到齊性方程的通解公式

$$x_h = 3 \times 5 \times 7 \times n = 105n,\ n \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

接著分別找

$$\begin{cases} x_1 = 3q_{11} + 1 \\ x_1 = 5q_{12} + 0 \\ x_1 = 7q_{13} + 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 3q_{21} + 0 \\ x_2 = 5q_{22} + 1 \\ x_2 = 7q_{23} + 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 3q_{31} + 0 \\ x_3 = 5q_{32} + 0 \\ x_3 = 7q_{33} + 1 \end{cases}$$

之特解，得到

$$x_1 = 70,\ x_2 = 21,\ x_3 = 15$$

然後線性組合

$$x_p = 70 \times 2 + 21 \times 3 + 15 \times 2 = 233 \tag{2}$$

此便為原問題的一個特解。結合 (1) 與 (2)，便得到通解

$$x = x_p + x_h = 233 + 105n,\ n \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

其中當 $n = 2$ 有最小正整數解 $x = 23$。寫到此處，筆者想起孔子說的：「吾道一以貫之。」

[①] 這個問題在《孫子算經・卷下》第二十六題，原文抄附如下：「今有物，不知其數。三、三數之，賸二；五、五數之，賸三；七、七數之，賸二。問物幾何？答曰：二十三。術曰：『三、三數之，賸二』，置一百四十；『五、五數之，賸三』，置六十三；『七、七數之，賸二』，置三十。并之，得二百三十三。以二百一十減之，即得。凡三、三數之，賸一，則置七十；五，五數之，賸一，則置二十一；七、七數之，賸一，則置十五。一百六以上，以一百五減之，即得。」其中「一百五」乃是一百零五，並非今日口語所指的一百五十。

而現今高中數學 99 課綱中之拉格朗日插值法，亦是韓信點兵思想之發揚。以下舉一實例，用同樣的想法寫出拉格朗日插值多項式。

給定 $A(3,2)$，$B(2,-1)$，$C(-1,3)$ 三點，求過此三點的最低次多項式函數 $f(x)$。我們先求出三個較特別的二次函數：

$$f_1(x): \text{ 過 } (3,1),(2,0),(-1,0)$$
$$f_2(x): \text{ 過 } (3,0),(2,1),(-1,0)$$
$$f_3(x): \text{ 過 } (3,0),(2,0),(-1,1)$$

然後設定

$$f(x) = 2\cdot f_1(x) + (-1)\cdot f_2(x) + +3\cdot f_3(x)$$

這樣便有

$$\begin{cases} f(3) = 2\cdot 1 + 0 + 0 = 2 \\ f(2) = 0 + (-1)\cdot 1 + 0 = -1 \\ f(-1) = 0 + 0 + 3\cdot 1 = 3 \end{cases}$$

即為所欲求之二次多項式函數。而每個 $f_i(x)$ 皆容易，因 $f_1(x)$ 過 $(2,0),(-1,0)$，設

$$f_1(x) = a(x-2)(x+1) \tag{4}$$

代 $(3,1)$ 得

$$1 = a\cdot(3-2)(3+1) \ \Rightarrow a = \frac{1}{(3-2)(3+1)}$$

再把這個 a 代回式子(4)得

$$f_1(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{(3-2)(3+1)}$$

同樣的流程，可解出

$$f_2(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{(2-3)(2+1)}$$
$$f_3(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(-1-2)(-1-3)}$$

便得到

$$f(x) = 2\cdot\frac{(x-2)(x+1)}{(3-2)(3+1)} + (-1)\cdot\frac{(x-3)(x+1)}{(2-3)(2+1)} + 3\cdot\frac{(x-2)(x-3)}{(-1-2)(-1-3)}$$

這就是拉格朗日插值法。