Q: 若 $f''(x) > 0$ 對任意 $x \in \mathbb{R}$ 皆成立，試證

$$f(x) \geq f(0) + f'(0)x$$

恆成立。

A: 《白話微積分》3.4 函數的單調性與凹凸性中（第 174 頁），介紹了八個有關函數凹凸性的不同定義，彼此不完全等價。其中定義 6 為：

定義 1

若函數 $f(x)$ 在區間 I 上可導，且對於任意 $x_0 \in I$ 皆滿足

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

即曲線 $y = f(x)$ 的切線恆在曲線下方，則 $f(x)$ 在區間 I 上是凸函數。

而定義 8 為：

定義 2

若函數 $f(x)$ 在區間 I 上二次可導，且 $f''(x) \geq 0$ 恆成立，則 $f(x)$ 在區間 I 上是凸函數。

回頭看此題，只是特別取 $x_0 = 0, I = \mathbb{R}$，其實就等同於要我們證明：

定理 1

若 $f(x)$ 在區間 I 上二次可導，則定義 6 可推得定義 8。

證明方法容易。
(1) 當 $x = 0$，顯然成立。
(2) 對於 $x > 0$，因為 $f''(x) \geq 0$ 恆成立，故 $f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上遞增。
$f(x)$ 為處處連續、處處可微，由拉格朗日微分均值定理：

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c),\ 0 < c < x$$

$f'(x)$ 遞增，故 $f'(c) \geq f'(0)$，結合上式得

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \geq f'(0)$$

再移項就有

$$f(x) \geq f(0) + f'(0)x$$

(3) 對於 $x < 0$，仿上論述即可。 ■

值得注意的是某個不經意犯的錯，使用泰勒展開：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\cdots$$

利用 $f''(x)\geq 0$ 恆成立，並略去三次以上諸項得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2\geq f(0)+f'(0)x$$

回想當我們學習泰勒展開的應用，我們是何時略去高次項？是在 $x\to 0$ 的時候！具體例子如《白話微積分》第 452 頁的例題 9.2.5。而後在第 464 頁介紹了**皮亞諾型餘項**的寫法，使得我們對於這種略去高次項的寫法有了進一步改進。

若以上面例子來說，我們可寫成

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)$$

何謂 $o(x^2)$ ？當 $x\to 0$ 時，它跑到 0 跑得比 x^2 還要快！即

$$\text{若}\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2}=0 \quad\Rightarrow g(x)=o(x^2)$$

當我們想清楚這些細節，便不會犯此種錯誤。

話說回來，要使用泰勒展開來證此題還是可以，只要善用**拉格朗日型餘項**：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(c)}{2!}x^2,\ 0<c<x$$

利用 $f''(x)\geq 0$ 恆成立，便得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(c)}{2!}x^2\geq f(0)+f'(0)x$$