# 1 極坐標簡介

我們平常所慣用的直角座標系，是由笛卡兒所提出的，因此又叫笛卡兒座標系。它的原理就好像，你自己是原點，當我問你西瓜在哪裡，你就說：「西瓜在我往東四步、往北三步的地方。」於是笛卡兒座標就寫成 $(4,3)$ 來表示西瓜的座標。

笛卡兒座標當然是非常好用的，但它其實跟我們日常習慣有點不一樣。我們判斷物品與我們的相對位置時，通常是看它方位在哪、距離我們多遠。所以你可能改回答：「在我的朝北 $53°$ 東方向看，前方五步的地方。」於是現在可能就會改寫成 $(5,53°)$。像這樣寫，便是**極座標**（polar coordinates）的想法。標上與原點的距離，以及方向，寫成 $(r,\theta)$。

不過，以上只是稍微演示一下其概念，與實際極座標的標法有點不同。極座標上在標方向的時候，我們並不是看它和北邊夾幾度角，而是它和 $x$ 軸正向夾幾度角。所以前述例子，若要以正確的極座標寫法，應該要寫成 $(5,37°)$。所以極座標 $(r,\theta)$，是分別透露了該點距離原點有多遠、該點與原點連線後與 $x$ 軸正向夾幾度角。簡單標三個點以作演示：$A(2,30°),B(3,135°),C(1.5,220°)$

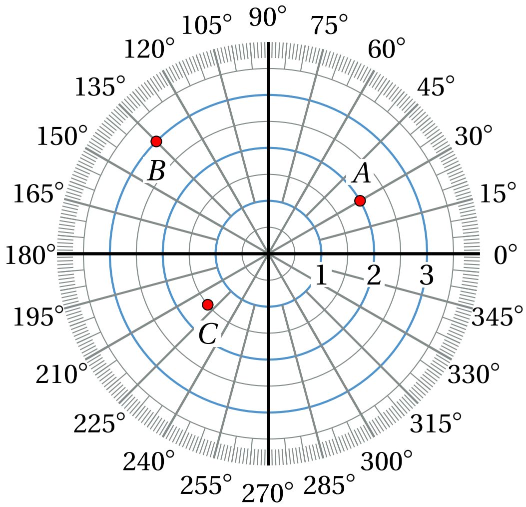



圖 1:

圖 1是畫在極座標圖上面，描點的時候就可以較方便地找出 $r$、$\theta$ 的位置。不過，即使我們是直接在直角座標圖上畫，或是自己在空白紙上手描，也並不很麻煩，只要大略地抓一下距離及角度就好了。

如果先有一個點的直角坐標，要如何轉換成極坐標呢？舉例來說，若 $P$ 點的直角座標是 $(\sqrt{3},1)$，我們先將 $P$ 點及 $r$、$\theta$ 標出來：

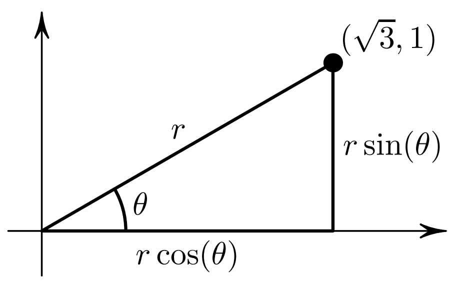



圖 2:

$r$ 是 $P$ 點到原點距離，所以是 2。至於 $\theta$，當然，根據我們對此特殊三角形的認識，

知道是 $\frac{\pi}{6}$。不過為了解說，我當作不知道。直角座標與極座標之間的關係，從圖中可看出來，為

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \tag{1.1}$$

還可以將上下式作相除，得到

$$\frac{y}{x} = \tan\theta$$

所以回到剛剛問題中，我們知道

$$\tan(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

於是 $\theta$ 可能是 $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{7\pi}{6}$，但由於 $x, y$ 都是正的，我們知道 $\theta$ 顯然是第一象限角，所以應該是 $\frac{\pi}{6}$。這樣便轉換完畢，直角座標中的 $(\sqrt{3}, 1)$ 轉換成極座標以後是 $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$。

**性質 1.1**

直角座標 $(x, y)$ 與極座標 $(r, \theta)$ 之間的轉換關係為

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

極座標的基本概念應不難懂，然而有幾個須注意的地方，以下這幾個特性使得同一個點可以有很多個不同的極座標表示。

首先，原點距離原點是 0，所以在極座標中，原點的 $r$ 就是 0。至於 $\theta$，則寫多少都可以。所以在極座標中，$(0, 12°) = (0, 213°) = (0, 65°)$。

另一個要注意的是，由於同界角[1]的關係，所以 $(2, 17°) = (2, 377°) = (2, -343°) = (2, 737°) = \cdots$。角度的部分任意加減 360° 的整數倍，都表示同一個點。

不只如此，$r$ 也有正負號的問題。比方說曹植在你東邊距離七步，你當然可以說：「曹植在我往東看，前方七步。」然而你卻也可以這樣講：「曹植在我往西看，後方七步。」這樣講是有點奇怪，誰沒事會像這樣子講話？但這樣的描述卻也是正確的，當你面向西時，他的確在你的後方七步。

暫且別管曹植了，他不會走過來。我的意思是說，同樣的位置，你可以把 $r$ 多個負號，則 $\theta$ 就多 180°。$(7, 0°)$ 這個座標，與 $(-7, 180°)$ 這座標，是同一個點！講得更一般一點，$(R, \alpha)$ 與 $(-R, \alpha + \pi)$，會是同一個點！所以 $(3, \frac{\pi}{4}) = (-3, \frac{\pi}{4} + \pi), (5, \frac{\pi}{6}) = (-5, \frac{\pi}{6} + \pi)$。

將以上討論作個整理：

**性質 1.2**

1. 任意的 $\theta$，$(0, \theta)$ 都是代表原點。
2. 任意整數 $k$，$(R, \alpha) = (R, \alpha + 2k\pi)$　　同界角
3. $(R, \alpha) = (-R, \alpha + \pi)$

除了將一個點的直角座標轉換為極座標以外，我們還可將一個曲線的直角座標方程式，轉換為極座標方程式。先舉個最簡單的例子：圓心在原點，半徑為 3 的圓。由於圓周上動點，距離原點永遠都是 3，這就是說 $r$ 恆等於 3。因此這個圓的極座標方程式，就是 $r = 3$。至於說 $\theta$ 的範圍，由於動點就繞著原點一圈跑完，可以知道就是 $0 \le \theta \le 2\pi$。

[1] 兩角度差了 360° 的 n 倍，等於是差了 n 圈，仍在同一位置。

以上我們根本沒有先寫出直角座標的方程式再行轉換，直接就寫出來。但是大部份的曲線，都比這個最簡單的例子複雜得多，不可能都這樣用想的就寫出來。所以來介紹如何先寫直角座標方程式，然後轉換成我們要的極座標方程式。我們可以利用前面所介紹的 $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$ 來作代入。代到這個圓的直角座標方程式 $x^2 + y^2 = 9$，得到 $r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta) = 9$。由於 $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$，故可簡化為 $r^2 = 9$，亦即 $r = \pm 3$。寫 $r = 3$ 或 $r = -3$ 都可以，理由是前面所提過的，$(R,\alpha) = (-R,\alpha+\pi)$。雖然不同的 $\theta$ 在二者中代表不同的動點，但所有介於 0 到 $2\pi$ 的 $\theta$ 繞完以後，都是形成我們要的那個圓。

如果你看不太懂，請看右圖。對於 $r = 3$ 這條曲線來說，當 $\theta = 0$ 時，它的動點位在 $A$ 點。而至於 $r = -3$ 來說，當 $\theta = 0$ 時，它的動點位在 $B$ 點。沒錯吧？你往東看時，在你背後三步的地方，便是你往西看，前方三步處。當 $\theta$ 由 0 開始跑，跑到 $\frac{\pi}{2}$。對於 $r = 3$ 這條曲線來說，動點跑出的軌跡是第一象限的部分；對於 $r = -3$ 這條曲線來說，動點跑出的軌跡是第三象限的部分。等到將 $\theta$ 從 0 到 $2\pi$ 完整跑完以後，動點便完整地跑出一個圓，這兩條曲線就會完全重合了。

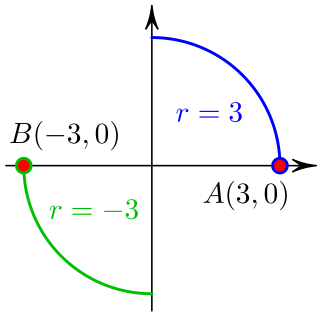



圖 3:

再介紹另一種圓，其直角坐標為：$(x-1)^2 + y^2 = 1$。乘開後得到

$$x^2 - 2x + y^2 = 0$$

再代 $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$，便有

$$r^2\cos^2(\theta) - 2r\cos(\theta) + r^2\sin^2(\theta) = 0$$

利用平方恆等式 $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$，可得

$$r^2 - 2r\cos(\theta) = 0$$

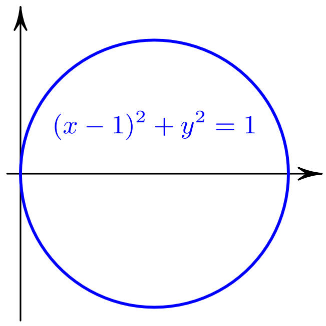



圖 4:

消去 $r$ 以後並移項，得到

$$r = 2\cos(\theta)$$

這樣便完成了。這種圓請你將其極座標方程式的形式記起來，因為在大一微積分中很常碰到。所謂的「這種」是指，圓心在座標軸上，並且圓周會通過原點。而這種圓又有上下左右四個情況

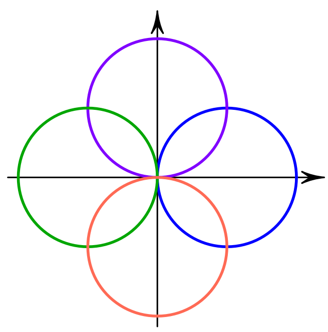


圖 5:

這種圓的極座標方程式的模樣都是

$$r = a\begin{cases}\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\end{cases} \tag{1.2}$$

這種樣子。$\sin(\theta)$ 或 $\cos(\theta)$ 其中一種，而 $a$ 又可能正可能負，這樣 $2\times 2$ 就正好有四種情形。具體說起來，上、下、右、左的極座標方程式分別為 $r = a\sin(\theta), a > 0$、$r = a\sin(\theta), a < 0$、$r = a\cos(\theta), a > 0$、$r = a\cos(\theta), a < 0$。記憶的訣竅很簡單：cos 和 $x$ 有關、sin 和 $y$ 有關，所以方程式中有 cos 的就是圓心在 $x$ 軸上、有 sin 的就是圓心在 $x$ 軸上。若 $a$ 是正的，圓心就在 $x$ 軸正向或 $y$ 軸正向；若 $a$ 是負的，圓心就在 $x$ 軸負向或 $y$ 軸負向。

最後還有一件很重要的事必須交代！就是 $\theta$ 的範圍！許多初學者會以為，這是圓嘛！那當然就是一圈，0 到 $2\pi$。不是這樣的！所謂的 $\theta$，是動點拉到原點後，這條拉出來的線與 $x$ 軸正向所夾的角。所以當我們面對 $r = 3$ 這個圓，我們並不是因為「這是個圓，動點跑了一圈」這樣的理由而說 $\theta$ 是從 0 到 $2\pi$。而是因為「動點**繞了原點**跑整整一圈」才說 $\theta$ 是從 0 到 $2\pi$。而我們現在面對的這個圓，它並沒有繞原點跑一圈嘛！

$r = \cos\theta$ 這個圓，它的 $\theta$ 是從 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$。你可以背起來，以下闡釋其原因。

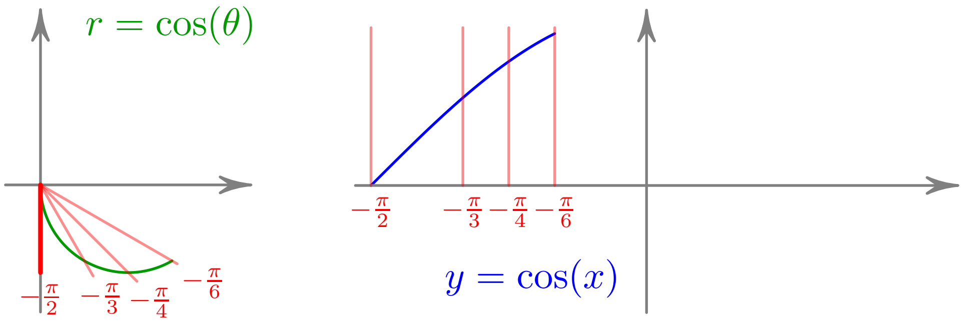



圖 6:

首先解 $\cos(\theta) = 0$，解出 $\pm\frac{\pi}{2}$，那我們就先從 $\theta = -\frac{\pi}{2}$ 出發，觀察隨著 $\theta$ 變動時，$r$ 會跟著如何變動。當 $\theta = -\frac{\pi}{2}$ 的時候，$r = 0$，動點在原點。接下來 $\theta$ 開始增加，$r$ 也從 0 開始遞增。所以隨著 $\theta$ 在第四象限角越來越大，動點也離原點越來越遠。當 $\theta$ 從 $-\frac{\pi}{2}$ 跑到 $-\frac{\pi}{6}$，動點形成的軌跡如圖 6。

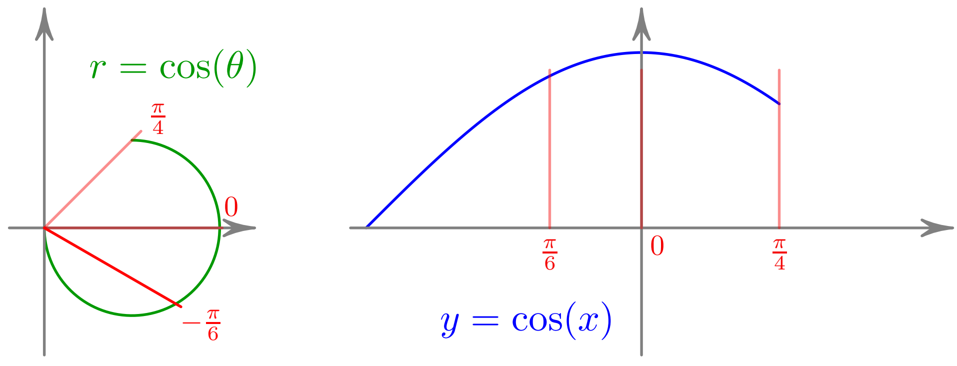



圖 7:

現在動點繼續跑到 $\theta = 0$ 時，達到 $\cos(\theta)$ 的極大值處，所以此時動點離原點是最遠了。接下來 $\theta$ 要進入第一象限角，$\cos(\theta)$ 要開始遞減了。跑到 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 時，動點形成的軌跡如圖 7。等到動點跑到 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 時，$r$ 又回到 0，動點就跑完一整個圓了！

如果我們讓 $\theta$ 繼續增加，會發生什麼事呢？$\theta$ 繼續增加，就來到第二象限。$\cos(\theta)$ 取第二象限角是負的，由 0 遞減到 $-1$。所以當方向是朝第二象限看的時候，動點是在背後，也就是第四象限。對於 $\theta$ 從 $\frac{\pi}{2}$ 跑到 $\frac{2\pi}{3}$，動點形成的軌跡是：

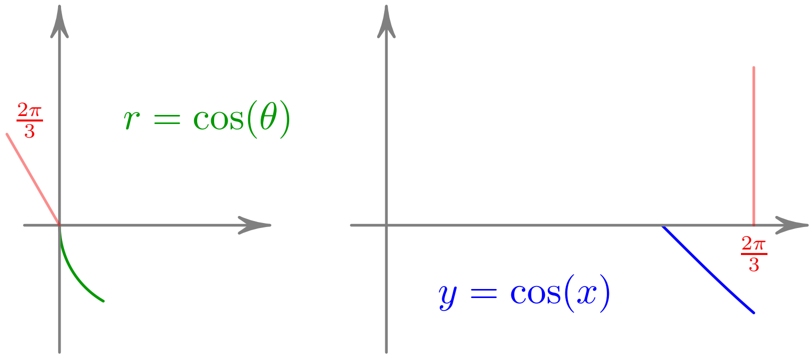



圖 8:

若 $\theta$ 從 $\frac{\pi}{2}$ 跑到 $\frac{3\pi}{2}$，會再跑完一次完整的圓。但這已經是將同樣的路徑跑第二遍啦！所以 $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$ 的部份不須要列進來。

類似地，當我們看到 $r = 5\sin\theta$，可分析出它是位於上方，$\theta$ 的範圍是 0 到 $\pi$。

再來看一個常見的曲線：心形線。它的極座標方程式是 $r = 1 - \cos(\theta)$，圖長這樣子：

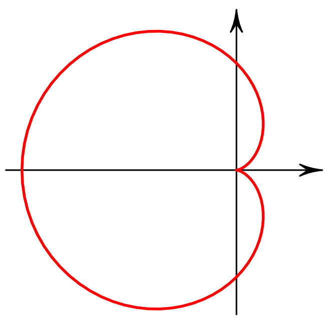


圖 9:

有點像愛心，所以我們稱之為**心形線**（cardioid）。心形線也會有上下左右四個方向。譬如說 $r = 1 + \sin(\theta)$，方向是這樣

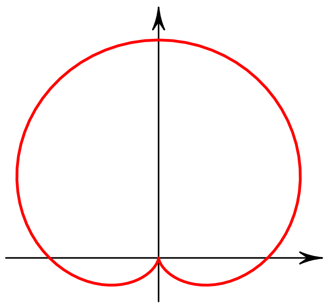


圖 10:

心形線方程式的形式是

$$r = a\left(1 \pm \begin{cases} \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{cases}\right)$$

取正負號、取 $\sin\theta$ 或 $\cos\theta$，這樣一共就 $2 \times 2 = 4$ 種。至於外面乘個常數 $a$，只不過是圖形的伸縮。哪個方向配哪個方程式，我們可以注意愛心的底部。如果方程式中有 cos，底部就位於 $x$ 軸上，若有 sin，底部就位於 $y$ 軸上。$\pm$ 那邊若取正號，底部就在 $x$ 軸正向或

$y$ 軸正向；若取負號，底部就在 $x$ 軸負向或 $y$ 軸負向。至於 $\theta$ 的範圍，動點會繞原點一圈，所以 $\theta$ 是 0 到 $2\pi$。

曲線的極座標方程式，並不見得都會是 $r = r(\theta)$ 的形式。譬如說 $y = x$ 這條直線，就寫成 $\theta = \frac{\pi}{4}$。仔細一看，沒錯嘛，任意的實數 $r$ 配上 $\frac{\pi}{4}$，的確就形成 $y = x$ 這條直線出來。當然我們也可以和前面一樣，代 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，得到 $r\sin\theta = r\cos\theta$。接著消去 $r$ 並且移項，得到 $\tan\theta = 1$，而這便等同於 $\theta = \frac{\pi}{4}$。或是你要寫 $\theta = \frac{5\pi}{4}$ 之類的，都可以，都會是同一條（why?）。甚至極座標的方程式也可以長這樣

$$r^2 = \cos(2\theta)$$

**例題 1.1** 將下列直角坐標方程式轉換為極坐標方程式：

(1) $x^2 + y^2 = 9$ (2) $x^2 + (y-4)^2 = 16$

(3) $x = 3$ (4) $2x + y = 4$

解

(1) 這是以原點為圓心、半徑為 3 的圓，故顯然其極坐標方程式為 $r = 3$ 或 $r = -3$。若代 $x = r\cos(\theta), y = \sin(\theta)$ 得 $x^2 + y^2 = r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta) = r^2 = 9$ $r = \pm 3$。

(2) 這是圓心在 $y$ 軸上且會通過原點的圓，所以是 $r = a\sin(\theta)$ 的形式。圓心位於 $y$ 軸正向，且直徑為 8，故 $a = 8$，其極坐標方程式為 $r = 8\sin(\theta)$。若欲代 $x = r\cos(\theta), y = \sin(\theta)$，可先乘開為 $x^2 + y^2 - 8y = 0$，此時再代得 $r^2 - 8r\sin(\theta) = 0 \Rightarrow r = 8\sin(\theta)$。

(3) $r\cos(\theta) = 3 \Rightarrow r = 3\sec(\theta)$

(4) $2r\cos(\theta) + r\sin(\theta) = 4 \Rightarrow r = \frac{4}{2\cos(\theta) + \sin(\theta)}$

**例題 1.2** 將下列極坐標方程式轉換為直角坐標方程式：

(1) $r = -6\cos(\theta)$

(2) $r^2 = 6\sin(2\theta)$

(3) $r = \frac{3}{2 + \cos(\theta)}$

解

(1) 這是圓心在坐標軸上且會通過原點的圓，由 cos 及 $a = -6 < 0$ 看出圓心位於 $x$ 軸負向、半徑為 $\frac{6}{2} = 3$，所以其直角坐標方程式為 $(x+3)^2 + y^2 = 9$。若要利用 $x = r\cos(\theta), y = \sin(\theta)$，可先等號兩邊同乘以 $r$ 得到 $r^2 = -6r\cos(\theta) \Rightarrow x^2 + y^2 = -6x \Rightarrow (x+3)^2 + y^2 = 9$。

(2) $r^2 = 6\sin(2\theta) = 12\sin(\theta)\cos(\theta) \Rightarrow r^4 = 12\big(r\sin(\theta)\big)\big(r\cos(\theta)\big) \Rightarrow \big(x^2 + y^2\big)^2 = 12xy$

(3) $r\big(2+\cos(\theta)\big)=3 \;\Rightarrow 2r=3-r\cos(\theta) \;\Rightarrow 4r^2=\big(3-r\cos(\theta)\big)^2 \;\Rightarrow 4\big(x^2+y^2\big)=\big(3-x\big)^2 \;\Rightarrow$ $3x^3+6x+4y^2-9=0$

接下來介紹極座標當中的對稱。先回憶一下在直角座標的情況，如果將 $-x$ 代到方程式中的 $x$，代完方程式仍長一樣。則其圖形會對 $x=0$，也就是 $y$ 軸對稱。一個例子是拋物線 $y=x^2$。類似地，若將 $-y$ 代到方程式中的 $y$，結果方程式仍長一樣。便知圖形會對 $y=0$，也就是 $x$ 軸對稱。一個例子是雙曲線 $y^2-x^2=1$，當然它同時也對 $y$ 軸對稱，這並不衝突。而如果同時將 $-x,-y$ 分別代到方程式中的 $x,y$，結果方程式仍長一樣。我們說這是對原點對稱，就是說把圖形繞著原點轉 $180°$ 後，圖形還是長一樣。例如 $y=\sin x$。如果把方程式中的 $x$ 和 $y$ 交換後，結果方程式仍長一樣。這種情況就是圖形對於 $y=x$ 這條線對稱。例如圓 $x^2+y^2=1$，它也同時包含了上述所有對稱，相當完美。

簡述完直角座標的對稱情況之後，接下來我們討論極座標的情況。如果說將 $-\theta$ 代入極座標方程式的 $\theta$，代完方程式長相不變，我們便知它的圖形對 $\theta=0$ 對稱，即上下對稱。而這件事，又等同於直角座標中對 $x$ 軸對稱。

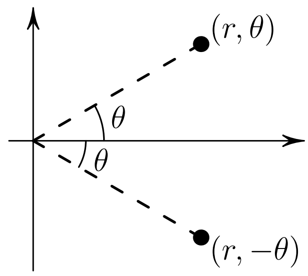
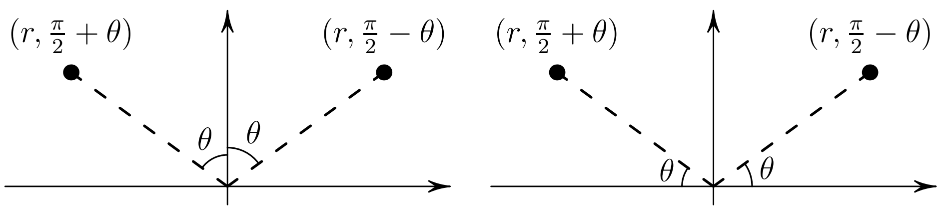



圖 11:

那麼，直角座標中對 $y$ 軸對稱，在極座標中應該是如何呢？畫個圖來看看，看起來似乎就是：如果由 $\frac{\pi}{2}$ 出發，加減 $\theta$ 都對應到相同的 $r$，這樣就是直角座標中對 $y$ 軸對稱。




(a) (b)

圖 12:

不過這樣麻煩了點，這件事怎麼實際應用呢？倒不如像圖 12b這樣看。將 $\pi-\theta$ 代入極座標方程式中的 $\theta$，代完後方程式長相不變，我們便知它的圖形對 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 對稱，即左右對稱。

至於說直角座標中的奇函數對稱情況：對原點對稱，就是圖形如果繞著原點轉 $180°$，轉完後圖形仍長得一樣。那也就是說，隨便抓曲線上某個點出來，把它轉 $180°$ 後，仍然在曲線上。將 $\pi+\theta$ 代入極座標方程式的 $\theta$，代完後方程式長相不變，便知它的圖形對原點對稱。前面談過，$(r,\pi+\theta)=(-r,\theta)$，所以亦可說成：將 $-r$ 代到極座標方程式的 $r$，代完長相不變，便知其圖形對原點對稱。

**性質 1.3 極座標中的對稱情況**

若對於任意位在圖形上的點 $(r,\theta)$，

1. $(r,-\theta)$ 必也在圖形上，則圖形對 $\theta=0$ 對稱，即上下對稱。
2. $(r,\pi-\theta)$ 必也在圖形上，則圖形對 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 對稱，即左右對稱。
3. $(r,\pi+\theta)$ 或 $(-r,\theta)$ 必也在圖形上，則圖形對原點對稱。

**例題 1.3** 判斷以下曲線的對稱性：

(1) $r=5+4\cos(\theta)$

(2) $r=\dfrac{2}{1+\sin(\theta)}$

(3) $r^2=8\cos(2\theta)$

解

(1) 看到 $\cos(\theta)$ 知代 $-\theta$ 到原 $\theta$ 處後方程式不變，故圖形上下對稱。

(2) 看到 $\sin(\theta)$ 知代 $\pi-\theta$ 到原 $\theta$ 處後方程式不變，故圖形左右對稱。

(3) 代 $-\theta$ 到原 $\theta$ 處、代 $\pi-\theta$ 到原 $\theta$ 處及代 $-r$ 到原 $r$ 處，方程式皆不變，故圖形同時有上下對稱、左右對稱、對原點對稱。$r^2=8\cos(2\theta)$