1 有理函數的積分

遇到積分

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4} \tag{1.1}$$

我們可以因式分解，然後拆成兩項，便容易分別積出

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)(x-2)} &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\Big[\ln|x-2|-\ln|x+2|\Big]+C\end{aligned} \tag{1.2}$$

至於

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

可拆成

$$\int 1-\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = x-\tan^{-1}(x)+C$$

以上所示，不外簡單拆項與利用 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\tan^{-1}(x)+C$，若是更複雜的，比方說 $\int \frac{2x^3-4x-8}{(x^2-x)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x$，就沒這麼容易了。

現在要探討的主題，就是一般而言，如何對於有理函數 $\frac{N(x)}{D(x)}$ 作積分，其中 $N(x), D(x)$ 為互質 [1] 的多項式。

假如 $\frac{N(x)}{D(x)}$ 是假分式，即 $\deg N(x) \geq \deg D(x)$，那麼我們可以將其化為帶分式。就是說，先用除法原理寫成

$$N(x) = D(x)Q(x)+r(x)$$

於是原來分式

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{D(x)Q(x)+r(x)}{D(x)} = Q(x)+\frac{r(x)}{D(x)}$$

$Q(x)$ 是多項式，積分毫不成問題，所以我們現在只須專注在真分式的處理方式。仿效式子(1.1)、式子(1.2)的經驗，我們首先對分母作因式分解，再試著把原分式拆開成幾個更簡單的分式。因為在大一微積分我們不太考慮複數的問題，所以可能會有不可分解的二次因式 (ax^2+bx+c), $b^2-4ac<0$。分母 $D(x)$ 分解後可能是

$$D(x) = \big(x-a_1\big)^{d_1}\big(x-a_2\big)^{d_2}\big(x-a_3\big)^{d_3}\big(x^2+b_1x+c_1\big)^{d_4}\big(x^2+b_2x+c_2\big)^{d_5}$$

有一次因式也有二次因式，各自有其次方。若一堆符號看來頭昏，舉個具體例子：

$$\frac{N(x)}{(x-1)^2(x+3)^5(x^2+x+4)(x^2-2x+5)^3}$$

[1] 即 $N(x), D(x)$ 最高公因式為 1。若不互質，消去就好了。

但這樣看還是有點複雜，讓我們先看看較簡單的

$$\frac{N(x)}{(x+2)^4} \tag{1.3}$$

此時的分母是四次式，而我們一開始就預設整個式子是真分式，所以分子 $N(x)$ 必為三次以下。而對於三次以下的 $N(x)$，我們在高中學過，一定可以把它寫成

$$N(x) = a(x+2)^3 + b(x+2)^2 + c(x+2) + d$$

於是式子(1.3)便成

$$\begin{aligned}\frac{a(x+2)^3 + b(x+2)^2 + c(x+2) + d}{(x+2)^4} &= \frac{a(x+2)^3}{(x+2)^4} + \frac{b(x+2)^2}{(x+2)^4} + \frac{c(x+2)}{(x+2)^4} + \frac{d}{(x+2)^4} \\ &= \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{c}{(x+2)^3} + \frac{d}{(x+2)^4}\end{aligned}$$

這樣便成功拆成幾項好積的分式。

例題 1.1 $\displaystyle\int \frac{2x^3+11x^2+23x+13}{(x+2)^4}\,\mathrm{d}x$

解

如前所示，第一步要解出

$$2x^3 + 11x^2 + 23x + 13 = a(x+2)^3 + b(x+2)^2 + c(x+2) + d$$

可使用綜合除法來解出那些係數。不過綜合除法並非唯一手段，也可以用比較係數。領導係數是 2，所以右式領導係數 $a = 2$；二次係數是 11，所以右式二次係數 $a\cdot 6 + b = 11 \Rightarrow b = -1$；一次係數是 23，所以右式一次係數 $a\cdot 12 + b\cdot 4 + c = 23 \Rightarrow c = 3$；常數項是 13，所以右式常數項 $a\cdot 8 + b\cdot 4 + c\cdot 2 + d = 13 \Rightarrow d = -5$。於是

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3+11x^2+23x+13}{(x+2)^4}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2(x+2)^3 - (x+2)^2 + 3(x+2) - 5}{(x+2)^4}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x+2} - \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2} + 3\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^3} - 5\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^4} \\ &= 2\ln|x+2| + \frac{1}{x+2} - \frac{3}{2(x+2)^2} + \frac{5}{3(x+2)^3} + C\end{aligned}$$

處理完分母只有一個一次因式的情形，現在來看分母是多個一次因式

$$\frac{N(x)}{(x+2)^4(x-1)^2} \tag{1.4}$$

只要先拆成

$$\frac{N_1(x)}{(x+2)^4} + \frac{N_2(x)}{(x-1)^2} \tag{1.5}$$

當然，$N_1(x)$ 是三次以下、$N_2(x)$ 是一次以下。

這樣立刻簡化為剛剛的問題！所以式子(1.4)最後會拆成

$$\frac{N(x)}{(x+2)^4(x-1)^2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{c}{(x+2)^3} + \frac{d}{(x+2)^4} + \frac{e}{x-1} + \frac{f}{(x-1)^2} \tag{1.6}$$

具體以 $\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}\,\mathrm{d}x$ 為例。先分解分母 $x^3+2x^2+x=x(x^2+2x+1)=x(x+1)^2$，得知被積分函數可分解為

$$\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^+x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2} \tag{1.7}$$

剛剛介紹不使用綜合除法的方法，其實是因為像現在如果我們還要先拆成 $\frac{N_1(x)}{x}+\frac{N_2(x)}{x}$，再分別用綜合除法，這樣太麻煩了，光是第一步就不好拆。既然我們已經知道最後會是式子(1.7)的形式，只要再設法解出未知係數就好了。為簡便，第一步可先等號兩邊同乘以分母，得到

$$\begin{aligned}5x^2+20x+6&=\left[\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}\right]\cdot x(x+1)^2\\&=a(x+1)^2+bx(x+1)+cx \end{aligned}\tag{1.8}$$

接著比較係數

$$\begin{cases}a+b=5\\2a+b+c=20\\a=6\end{cases}\Rightarrow (a,b,c)=(6,-1,9) \tag{1.9}$$

這樣就知道

$$\begin{aligned}\int\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^+x}\,\mathrm{d}x&=6\int\frac{\mathrm{d}x}{x}-\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}+9\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2}\\&=6\ln|x|-\ln|x+1|-\frac{9}{x+1}+C\end{aligned}$$

比較係數並不總是簡便，像此例，比較係數就出現三元一次方程組，只是恰巧其中一個是 $a=6$，導致這裡可以很快解出。若在別題，也許不會這麼舒服。所以這裡我再介紹另一個手法：代數值。因為式子(1.8) 的意思是左右兩邊是恆等的，那麼當然我代什麼 x 值進去，函數值皆相等。而在代的時候，盡量代好算的值。注意到右式有兩項含有 $(x+1)$，所以代 $x=-1$：

$$-9=0+0-c\ \Rightarrow c=9$$

因為有兩項含有 x，所以代 $x=0$：

$$6=a+0+0$$

現在就差 b 了，$x=0$ 和 $x=-1$ 都代過了，怎麼辦呢？此時有兩種選擇：第一，沒人規定一定要看著因式代，那只不過是會出現 0 感覺簡便而已，所以下一步我們可以代 $x=2$，也可以代 $x=1$。代什麼都好，盡可能好算就行。第二，比較二次係數：$5=a+b$。比較係數法與代數值，並不是那麼涇渭分明，不是説你用了一個方法就要直通到底，其實可以靈活地隨時變換方法。

例題 1.2 $\int\left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2\mathrm{d}x$

解

$$\left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2=\frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2}$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow x^2 = A(x-1)(x-2)^2 + B(x-2)^2 + C(x-2)(x-1)^2 + D(x-1)^2$$

$x = 1$：

$$B = 1$$

$x = 2$：

$$D = 4$$

比較三次係數及常數項

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ -4A + 4B - 2C + D = 0 \end{cases} \Rightarrow A = 4, C = -4$$

於是

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 \mathrm{d}x &= \int \frac{4}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{4}{x-4} + \frac{4}{(x-2)^2} \,\mathrm{d}x \\ &= 4\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} - 4\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} + 4\frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2} \\ &= 4\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - 4\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} + C \end{aligned}$$

例題 1.3 $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,\mathrm{d}x$

解

分解分母 $x^3 + x^2 - 6x = x(x-2)(x+3)$，故

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

$$\Rightarrow x + 1 = A(x-2)(x-3) + Bx(x+3) + Cx(x-2)$$

$$\text{代值} \Rightarrow \begin{cases} (x=0) & 1 = -6A \\ (x=2) & 3 = 10B \\ (x=-3) & -2 = 15C \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{6}\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{3}{10}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} - \frac{2}{15}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+3} \\ &= -\frac{1}{6}\ln|x| + \frac{3}{10}\ln|x-2| - \frac{2}{15}\ln|x+3| + C \end{aligned}$$

以上便討論完分母只含一次因式的情況，現在我們要接著討論分母含有不可約 (irreducible) 二次式 $ax^2 + bx + c, b^2 - 4ac < 0$ 該如何處理。

首先最簡單的情況

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \tan^{-1}(x) + C$$

接著考慮稍微複雜些，x^2 的係數是 a^2

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+a^2x^2}$$

我們要善於化未知為已知，設 $u = ax$，於是

$$\int \frac{\frac{1}{a}\,\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}(u) + C = \frac{1}{a}\tan(ax) + C$$

改為考慮常數項是 b^2

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{b^2+x^2}$$

改用參變代換，設 $x = bt$，於是

$$\int \frac{b\,\mathrm{d}t}{b^2+b^2t^2} = \frac{b}{b^2}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{b}\tan^{-1}(t) + C = \frac{1}{b}\tan^{-1}(\frac{x}{b}) + C$$

最一般的情況

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{b^2+a^2x^2}$$

設 $ax = bt$

$$\int \frac{\frac{b}{a}\,\mathrm{d}t}{b^2+b^2t} = \frac{1}{ab}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{ab}\tan^{-1}(t) + C = \frac{1}{ab}\tan^{-1}(\frac{a}{b}x) + C$$

所以對於分子是常數、分母是缺一次項的二次式 $\int \frac{\mathrm{d}x}{b^2+a^2x^2}$，我們現在都會做了，這一系列都和 $\tan^{-1}$ 有關。至於分子如果是一次式，若設分母為 u，那麼分母的導函數正是純一次項，所以只要直接將分子的兩項分開就好了。具體例子如

$$\int \frac{6x+5}{2+3x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{6x}{2+3x^2}\,\mathrm{d}x + 5\int \frac{\mathrm{d}x}{2+3x^2}$$

後項就是剛剛才討論出來的類型，前項只要設 $u = 3x^2+2, \mathrm{d}u = 6x\,\mathrm{d}x$，便可輕鬆做出。

討論完分母為缺一次項二次式的情況，要處理分母為一般的二次式 $\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$ 就容易了。化未知為已知，我們只要將其化為缺一次項的形式就好了，這個技巧我們早在國中就學過：配方法。例如

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+2^2}$$

此時只要設 $x+1 = 2t$，就有

$$\int \frac{2\,\mathrm{d}t}{2^2t^2+2^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}(t) + C = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

所以，分子為常數，分母為一般的不可約二次式，我們也都會做了。至於連分子也是一次式的情況，在討論之前，先回去修改剛剛的做法。剛剛的過程是先配方，再設變數代換。現在修改成直接變數代換：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2^2}$$

這裡我取一個名稱：配方代換。因為 x^2+2x+5 會配方成 $(x+1)^2+4$，所以設 $t=x+1$。既然前面討論完分母缺一次項的作法，所以有一次項就用配方代換來變成缺一次項。於是對於分子為一次式的情況即可寫成

$$\begin{aligned}\int \frac{3x-1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3t-4}{t^2+2^2}\,\mathrm{d}t = 3\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2+2^2} - 4\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2^2} \\ = \frac{3}{2}\ln\left|t^2+2^2\right| - 4\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}(\frac{t}{2}) + C \\ = \frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right| - 2\tan^{-1}(\frac{x+1}{2}) + C\end{aligned}$$

就這樣，一般的 $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$ 我們都能對付了。

性質 1.1　$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$ 的處理策略

對於 $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$，用配方代換 $t = x + \frac{b}{2a}$，使其變成 $\int \frac{A't+B'}{a't^2+b'}\,\mathrm{d}t$，再拆成 $A'\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{a't^2+b'} + B'\int \frac{\mathrm{d}t}{a't^2+b'}$，前者用 $u = a't^2+b'$ 代換、後者和 $\tan^{-1}$ 有關。

理論上，對於

$$\frac{N(x)}{(x+2)^2(x-1)(x^2+2x+5)^3} \tag{1.10}$$

我們是可以拆成

$$\frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+2x+5} + \frac{Fx+G}{(x^2+2x+5)^2} + \frac{Hx+I}{(x^2+2x+5)^3} \tag{1.11}$$

待決定完係數之後，我們有四類形式的積分要解決：

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+a}$　　(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^n}$

(3) $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$　　(4) $\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x$

(1) 與 (2) 是最簡單的，直接可做出來。至於 (3) 則正是剛剛花些篇幅討論出了，所以現在也能對付。最麻煩的是 (4)，比較沒那麼容易。在進行對 (4) 的探討前我先聲明，各個微積分教科書中對此的介紹深淺不一，許多流行的歐美教科書都只是簡單帶過而已。所以你可以視自己需求決定要不要看這裡對 (4) 的討論，也可以先跳去看例題再說。

仿照剛剛的討論，先用配方代換來使分母變成缺一次項：

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x = \int \frac{A't+B'}{(a't^2+b')^n}\,\mathrm{d}t$$

再仿照剛剛，拆成

$$A'\int \frac{\mathrm{d}t}{(a't^2+b')^n} + B'\int \frac{\mathrm{d}t}{(a't^2+b')^n}$$

前項直接設分母為 u 就解決了，所以我們剩下 $\int \frac{\mathrm{d}t}{(a't^2+b')^n}$ 的問題。而這又可簡稱為 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}$ 的問題，因為我們總是可以透過代換來讓那兩個係數變成 1。

先看個簡單一點的 $n=2$：

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} &= \int \frac{\sec^2(t)\,\mathrm{d}t}{\sec^4(t)} \qquad \boxed{x=\tan(t)} \\
&= \int \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t + \frac{\sin(2t)}{4} + C \\
&= \frac{1}{2}t + \frac{\sin(t)\cos(t)}{2} + C = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\cdot\frac{\tan(t)}{\sec^2(t)} + C \\
&= \frac{1}{2}\tan^{-1}(x) + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1} + C
\end{aligned}$$

看起來只要簡單做個三角代換 $x=\tan(t)$ 就好，不過隨著 n 越大，代換完畢後的 $\int \cos^{2n-2}(t)\,\mathrm{d}t$ 也就越麻煩。實際上也不太須要擔心，因為一般來說，大一微積分課程不會真的拿分母有不可約二次式的高次項來惡搞你。另一個方法是寫出漸降式

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n} = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{n-1}} - \int x\cdot\frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n} \\
&= I_{n-1} - \left[-x\cdot\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{n-1}}\right] \qquad \boxed{\text{分部積分}} \\
&= \frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}
\end{aligned}$$

當 $n=1$ 時是我們熟悉的 $I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \tan^{-1}(x)+C$。接著依序寫出

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\tan^{-1}(x) + C \\
I_3 &= \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}I_2 \\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{8}\cdot\frac{x}{x^2+1} + \frac{3}{8}\tan^{-1}(x) + C
\end{aligned}$$

依次類推，理論上所有次方都是能對付的。

例題 1.4 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$

解

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^3+1} &= \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} \\
&= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \\
&\Rightarrow 1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)
\end{aligned}$$

比較係數得

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{1}{3}, B=-\frac{1}{3}, C=\frac{2}{3}$$

若要代數值，第一步代 $x=-1$ 可得 $A=\frac{1}{3}$；接著代 $x=0$，可避免 B 的出現，得 $A+C=1$；最後再隨意代，或者直接看領導係數，解出 B。於是

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1} &= \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \int \frac{t-\frac{3}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t && \boxed{\text{配方代換 } x-\tfrac{1}{2}=t} \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2+\frac{3}{4}} + \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\frac{3}{4}} && \boxed{\text{拆項}} \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u}{u} + \frac{1}{2}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}k}{\frac{3}{4}k^2+\frac{3}{4}} && \boxed{t=\tfrac{\sqrt{3}}{2}k} \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|u| + \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}k}{k^2+1} + C \\
&= \frac{1}{6}\Big(2\ln|x+1| - \left|x^2-x+1\right|\Big) + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}(k) + C \\
&= \frac{1}{6}\Big(\ln(x+1)^2 - \left|x^2-x+1\right|\Big) + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right) + C \\
&= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C
\end{aligned}$$

有理函數的積分，經常會做到後面數字很複雜。但我們已經理出一般性的策略，只要按這模式，就可以解決有理函數的積分。縱使過程複雜，只要耐著性子寫，通常不難寫出來。

例題 1.5 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$

解

首先應注意

$$\begin{aligned}
x^4+1 &= x^4+2x^2+1-2x^2 \\
&= \left(x^2+1\right)^2 - \left(\sqrt{2}x\right)^2 \\
&= \left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right) && \boxed{\text{平方差公式}}
\end{aligned}$$

所以

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

$$\Rightarrow 1=\left(Ax+B\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)+\left(Cx+D\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)$$

比較常數項，可得 $B+D=1$；比較 x^3 係數，可得 $A+C=0$；比較 x^2 係數，可得 $B-\sqrt{2}A+D+\sqrt{2}C=1+2\sqrt{2}C=0$；最後再比較一次係數，就可以解出 $A=\frac{\sqrt{2}}{4},B=\frac{1}{2},C=-\frac{\sqrt{2}}{4},D=\frac{1}{2}$。於是

$$\begin{aligned}
\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}&=\int\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x+\int\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x-\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\int\frac{t+\frac{\sqrt{2}}{2}}{t^2+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t-\int\frac{k-\frac{\sqrt{2}}{2}}{k^2+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}k\right)\\
&=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\int\frac{t}{t^2+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t-\int\frac{k}{k^2+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}k\right)+\frac{1}{4}\left(\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+\frac{1}{2}}-\int\frac{\mathrm{d}k}{k^2+\frac{1}{2}}\right)\\
&=\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\ln\left|t^2+\frac{1}{2}\right|-\ln\left|k^2+\frac{1}{2}\right|\right)+\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}\tan^{-1}(\sqrt{2}t)-\tan^{-1}(\sqrt{2}k)\right)+C\\
&=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x+1\right)-\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x-1\right)\right)+C
\end{aligned}$$

例題 1.6 $\int\frac{x^2-1}{(x^2+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$

解

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-1}{(x^2+1)(x+2)}&=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}\\
&\Rightarrow x^2-1=A(x^2+1)+(Bx+C)(x+2)
\end{aligned}$$

代 $x=-2$ 得 $3=5A$；代 $x=0$ 得 $-1=A+2C$；比較領導係數得 $1=A+B$。故可解出 $A=\frac{3}{5},B=\frac{2}{5},C=-\frac{4}{5}$。於是

$$\begin{aligned}
\int\frac{x^2-1}{(x^2+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x&=\frac{3}{5}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+2}+\frac{2}{5}\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}-\frac{4}{5}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}\\
&=\frac{3}{5}\ln|x+2|+\frac{1}{5}\ln\left|x^2+1\right|-\frac{4}{5}\tan^{-1}(x)+C
\end{aligned}$$