1 自然指數與自然對數

1.1 自然指數

全宇宙最重要的常數，就是自然指數的底：e。為了介紹這個數，我們先來想一個跟存款有關的問題。假設存款的年利率 P，每半年計息一次，複利計算。那麼我放的本金 A，過了一年會變多少錢呢？年利率是 P，所以半年的利率是其一半：$\frac{P}{2}$，一年以後計息兩次，所以本利和為

$$A \times \left(1 + \frac{P}{2}\right)^2$$

那如果是每季計息一次，季利率是 $\frac{P}{4}$，一年以後計息四次，所以本利和為

$$A \times \left(1 + \frac{P}{4}\right)^4$$

計息越多次，對我就越有利。這很容易理解，因為若分為 n 次計息，每次的利息就是 $A \times \frac{P}{n}$。假設利息是單利計算的話，一年以後的總利息就是 $A \times P$，跟計息幾次的 n 是無關的。但我們事實上是複利計算，所以便很顯然，n 越大本利和就會越大。假設我很貪心，跑去跟銀行要求，我想要每個月計息一次，那麼我一年後的本利和就是

$$A \times \left(1 + \frac{P}{12}\right)^{12}$$

人心不足蛇吞象，後來我又得寸進尺地要求每天計息一次，那麼我一年後的本利和就是

$$A \times \left(1 + \frac{P}{356}\right)^{365}$$

銀行實在是很好說話，還是一口就答應。如果我還是跑去要求要每十二小時計息一次、每小時計息一次、每分鐘計息一次、... 那麼我的本利和會無止盡地膨脹下去嗎？換句話說，$A \times \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{P}{n}\right)^n$ 是多少？是無窮大嗎？還是有限的值？

為了簡便，我們姑且設 $P = 1$，雖然不會有人年利率是用 1 [1]，但到時你就知道我們可以事後再將 P 代其它值。也就是說呢，我們目前的問題是：（將 A 也先省略）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 是多少？

千萬不要以為，底數趨近到 1，而 1 的任何次方還是 1。當然不是，我們代 $n = 1$，其值就 $1 + 1 = 2$ 了。而剛剛討論過，n 越大的話其值會越大，就更不會是 1 了！這樣思考的錯誤在於，底數是「趨近到 1」，而不是「1」。所以這就有如雙方在賽跑，看誰跑得快。如果次方快得多，就會趨近到無限大；如果底數跑到 1 快得多，就會趨近到 1。如果雙方差不多快，就會跑到一個常數 C ($C > 1$)。那麼它究竟趨近到多少呢？數學家 Euler 在他的著作中，將這個數取符號為 e [2]。換句話說，我們這麼定義

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

[1] 目前放一年的定期存款，年利率大約是 0.013 左右，活期存款的年利率更是連 0.005 都不到。而股神巴菲特買股票的年化報酬率，也不過平均 0.23 左右。

[2] 有人說這是取他名字的第一個字母。也有人認為 Euler 為人這麼謙虛不會這麼做，應該是取指數 exponential 的第一個字母。

並且 Euler 計算它的值精確到小數點後十八位。它的值大約是

$$e = 2.718281828459045\cdots$$

那現在回到原本問題，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{P}{n}\right)^n$ 是多少呢？數學上常常是利用已知解決未知，我們已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$，能不能把我們現在要算的東西，跟它牽扯上關係呢？首先我們將 P 除到分母去：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{P}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{P}}\right)^n$$

接著為了要對齊，我們將次方也寫成 $\dfrac{n}{P}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{P}}\right)^{\frac{n}{P}}\right)^P$$

然後把 lim 丟到裡面去

$$\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{P}}\right)^{\frac{n}{P}}\right)^P$$

這時候我們令 $m = \dfrac{n}{P}$。由於 P 是有限的正數，所以既然 $n\to\infty$，那麼除以有限正數之後仍是趨近無限大，也就是說 $m\to\infty$。所以變成

$$\left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^P = e^P$$

就是這樣啦！$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{P}{n}\right)^n = e^P$ 請記起來，包括上述過程，這很常考的 [3]。

在剛剛所說的銀行存款例子中，就算我要求每秒計息、每毫秒計息，再怎麼如何得寸進尺下去。一年下來的本利和其實也不會超過 $A\times e^P$。若以目前第一商業銀行的活期儲蓄存款之年利率 $P = 0.0032$ 來算，那就是

$$A\times e^{0.0032} \doteqdot A\times 1.003205125$$

嘩！跟一年只計一次息根本差不了多少嘛 [4]！難怪愛吸血的銀行會這麼配合，他們根本不痛不癢！

隨著年利率的不同，P 就代不同的值到 e^P。那我們可以將 P 改寫成變數 x，於是這就是自然指數函數 e^x，e 就是這個自然指數函數的底。

e 的定義也可以寫成

$$e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

這只要由前一個定義中，代 $n = \frac{1}{x}$，代完就會是 $e = \lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}$，接著再試圖說明說左極限等於右極限，就好啦！

[3] 我如果說後面也會用到，那你可能不是很有興趣理我。我說很常考，那你十之八九就會記起來啦！事實上也是真的蠻常考的。

[4] 這是因為 P 實在太小了，P 越大的話差異會越大。

例題 1.1

$$\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

解

設 $m=-n$，則有

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m} = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{m-1}{m}\right)^{-m}\\
&= \lim_{m\to\infty}\left(\frac{m}{m-1}\right)^{m} = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m}\\
&= \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}\cdot\left(1+\frac{1}{m-1}\right) \qquad \boxed{\text{為了對齊，拉一個出來}}\\
&= e\cdot 1 = e
\end{aligned}$$

■

例題 1.2

$$\lim_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

解

設 $x=\frac{1}{n}$，則

$$\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

■

note

應當可以注意到，我們不斷利用變數代換的技巧來化未知為已知。

例題 1.3

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

解

e 的定義中，裡面是 $1+\frac{1}{n}$，這裡卻是 $1-\frac{1}{n}$，怎麼辦呢？我們剛剛已經知道

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

現在不過是 $a=-1$ 的情況，所以答案是 $e^{-1}=\frac{1}{e}$。也可以作變數代換，設 $m=-n$，則

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{m\to-\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-m}\\ &= \lim_{m\to-\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^{-1}\\ &=\left[\lim_{m\to-\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^{-1} = e^{-1}\end{aligned}$$

■

例題 1.4

$$\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$$

解

這就是 $a=2$ 的情況，所以答案是 e^2。

■

例題 1.5

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n}{n}\right)^{2n+1}$$

解

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n}{n}\right)^{2n+1}\\ &=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+1\right)^{2n+1}\\ &=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{n}+1\right)^n\right]^2\cdot\left(\frac{1}{n}+1\right)\\ &=e^2\cdot1=e^2\end{aligned}$$

■

1.2 自然對數

一般的對數函數是 $\log_a x$，若是我們將底數放 e，那就是 $\log_e x$。這就是自然對數函數，因為實在特別重要，所以特地給它符號

$$\ln(x) = \log_e x$$

自然對數也是對數，所以對數的運算律在它身上也是成立的。其中一個運算律我特地拿來講一下，本來我們有

$$A = b^{\log_b A}$$

A 是任意正實數，b 則是任意合法的實數 [5]。我們在微積分中比較常用 e 了，所以就將 b 取成 e

$$A = e^{\ln(x)}$$

note

ln 是 nature log 之意。十七世紀時 Pietro Mengoli 使用拉丁文 logarithmus naturalis 來稱呼，1893 年時 Irving Stringham 使用 ln 作為符號。

例題 1.6

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

解

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) \\
&= \lim_{x\to 0} \ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right) && \boxed{\text{對數的運算律}} \\
&= \ln\left(\underbrace{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}}_{e}\right) \\
&= \ln e = 1
\end{aligned}$$

■

[5] 合法的意思是符合底數的限制：$b > 0$ 且 $b \neq 1$

1.3 自然指數與自然對數的導函數

我們現在來探討，自然指數 e^x 與自然對數 $\ln(x)$ 的導函數。我們利用微分的定義來操作

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}\\ &= e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}\end{aligned}$$

此時，我們設 $y = e^h - 1$，於是 $e^h = 1 + y$。接著等號兩邊都同取自然對數，$h = \ln(1 + y)$。當 $h \to 0$ 時，$y \to 0$。所以接下來是

$$e^x \cdot \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}$$

回想一下前面有一題做到 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$，所以倒數 $\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}$ 也是 1。最後就是

$$e^x \cdot 1 = e^x$$

也就是說 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x = e^x$ 。

至於自然對數 $\ln(x)$ 的導函數，也是一樣將微分的定義寫一遍。

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} \qquad \boxed{\text{對數相減等於裡面相除}}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x}\end{aligned}$$

故意將式子湊成那個樣子，就是想故技重施，再用一次 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$。所以設 $y = \frac{h}{x}$，當 $h \to 0$，$y \to 0$。就變成

$$\begin{aligned}&\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}\cdot\frac{1}{x}\\ &=1\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\end{aligned}$$

所以 $\ln(x)$ 的導函數就是 $\frac{1}{x}$ 。

1.4　e 之趣談

e 這個數真的是太重要也太奇妙了！以下收錄一些 e 的奇妙蹤跡。只是簡略介紹，並不作深入探析。

1. **歐拉恆等式**

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

這個式子幾乎被公認為世上最美麗的公式，加法單位元素 0、乘法單位元素 1、圓周率 π 以及歐拉數 e，這幾個重要但看似彼此無關的數，由一個式子這樣統合了在一起。

2. **質數分佈定理**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln(x)}} = 1$$

函數 $\pi(x)$ 是質數函數，定義為小於等於 x 的質數個數。比方說前幾個質數為 $2, 3, 5, 7$，那麼就可以寫 $\pi(1) = 0,\ \pi(2) = 1,\ \pi(5) = 3,\ \pi(9.7) = 4$ 等等。而這個極限告訴我們，在 x 很大的時候，$\pi(x)$ 和 $\frac{x}{\ln(x)}$ 是非常近似的。也可以將此極限寫成另外一個形式

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi(x)}{x}}{\frac{1}{\ln(x)}}$$

這樣寫是將 $\frac{\pi(x)}{x}$ 看成質數密度：小於等於 x 的質數個數除以 x，這個密度當 x 很大時近似于 $\frac{1}{\ln(x)}$。質數與 e，兩者看似毫無關係，彼此竟有這樣的聯繫。

3. **何時開方最大**

x 取值為怎樣的正數，會使 $\sqrt[x]{x}$ 最大呢？試著代入前幾個正整數：

$$1^{\frac{1}{1}} = 1.0000,\ 2^{\frac{1}{2}} \doteqdot 1.4142,\ 3^{\frac{1}{3}} \doteqdot 1.4422,\ 4^{\frac{1}{4}} \doteqdot 1.4142,\ 5^{\frac{1}{5}} \doteqdot 1.3797,$$
$$6^{\frac{1}{6}} \doteqdot 1.3480,\ 7^{\frac{1}{7}} \doteqdot 1.3205,\ 8^{\frac{1}{8}} \doteqdot 1.2968,\ 9^{\frac{1}{9}} \doteqdot 1.2765,\ 10^{\frac{1}{10}} \doteqdot 1.2589,\ \cdots$$

可以發現，越大的數代出來越小，但前幾項似乎例外。那麼，若考慮所有正實數 x，何時能使 $x^{\frac{1}{x}}$ 最大呢？答案是當 $x = e \doteqdot 2.718$，有最大值 $e^{\frac{1}{e}} \doteqdot 1.444667861$。

4. **何時乘積最大**

如果將一個正數分成若干份，並將所有的數乘起來，那麼如何分，會使整個乘積最大呢？首先由算幾不等式

$$\sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

可以知道，平分會比分得不均還要大。那麼要平分為幾份會最大呢？這相當於求 $y = \left(\frac{a}{x}\right)^x$ 何時有極大值。答案是當 $x = \frac{a}{e}$，即將 a 分成 $\frac{a}{e}$ 等分，每一份都是 $\frac{a}{\frac{a}{e}} = e$，再把每一個數乘起來。不過 $\frac{a}{e}$ 不一定剛好是整數，所以要改取離 $\frac{a}{e}$ 旁邊的整數。

5. **相親問題**

杜蘭朵公主要招親，前來相親的人選眾多，要如何挑出適宜人選呢？皇帝決定：讓全部 n 個前來相親的人一個個輪流進來，先直接拒絕前面 x 個，之後每一個人和那前 x 個人比較，只要出現比前面 x 個人好的人選，就馬上成親，否則刷掉。皇帝希望知道，如何決定 x，使得挑到最好人選的機率最大。x 不能取得太大，這樣最好人選很可能就在那 x 裡面，那麼公主只好去當尼姑；x 也不能取太小，這樣很快就有次好人選比前 n 個還好，便取不到最好人選。

幸好有個臣子懂微積分，經過一番計算以後，知道 x 要取成大約佔 n 的 $\frac{1}{e} \doteqdot 0.368$。換句話說，$x$ 約等於 $\frac{n}{e} \doteqdot 0.368n$ 時，選到最好人選的機率最大。而此時選到最好人選的機率亦是 $\frac{1}{e}$。

6. **懸鏈線問題**

將鏈的兩端固定，使其受重力自然垂下，此時鏈子會形成怎樣的曲線呢？伽利略誤認為應該是一條拋物線，後來十七世紀末，雅可布・伯努利 (Jakob Berboulli) 及萊布尼茲 (Gottfried Leibniz) 做出正確答案，懸鏈線的方程式為：

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{ax} + e^{-ax}\right)$$

其中 a 是一個和鏈子密度與張力有關的正數。

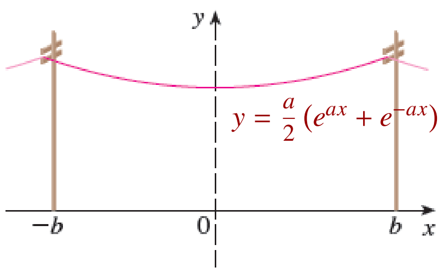

Figure 1: 懸鏈線

7. a^x **與** $\log_a x$ **圖形交點數**

函數 $y = a^x$ 與 $y = \log_a x$ 的圖形，通常是分離，但是在底數 a 足夠小，例如 $a = 1.4$ 時，會交於兩點。

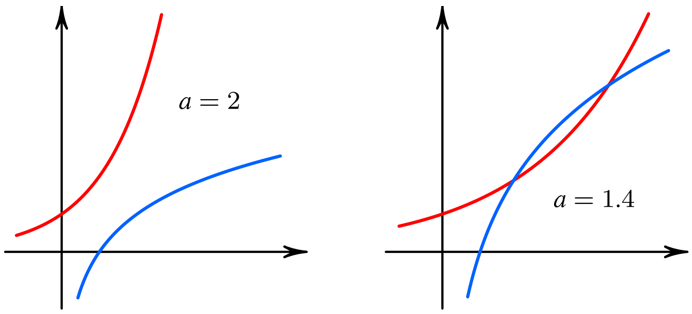

Figure 2: $y = a^x$ 與 $y = \log_a x$ 分離或交兩點

那麼 a 取值多少時會正好相切呢？答案是當 $a = e^{\frac{1}{e}} \doteqdot 1.444667861$ 時。

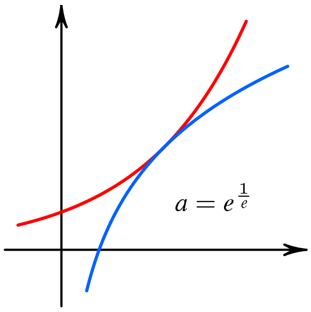

Figure 3: $y = a^x$ 與 $y = \log_a x$ 相切

更有趣的是，並不是 a 比 $e^{\frac{1}{e}}$ 小就一定都是兩交點，例如當 $a = 0.01$，就有三個交點。

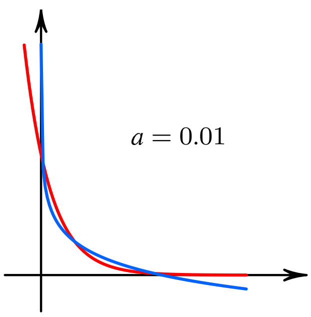

Figure 4: $y = a^x$ 與 $y = \log_a x$ 交於三點

那麼何時交於三點呢？當 $0 < a < e^{-e} \doteqdot 0.066$ 的時候。e！又是你！

8.

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots$$
$$\frac{1}{e} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots$$

9.

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \doteqdot 0.2078796$$

虛數的虛數次方是個實數，而這個實數又與 e 及 π 有關。

10.

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{5}{6 + \cfrac{6}{7 + \cfrac{7}{\cdots}}}}}}}}$$