何謂隨機變數

卓永鴻 提供

本文介紹什麼是隨機變數及為什麼要發展此種概念。我們先來看這問題：一個邊長為 a 的正三角形，C 為其外接圓，外接圓半徑為 R。若在圓內隨機作一弦，則弦長 l 大於 a 的機率為何？

1. 隨機半徑法

   先拉出一條圓半徑，然後隨機在半徑上取一點，再畫出通過此點並垂直半徑的弦。易知當弦心距小於 $\frac{R}{2}$ 時，弦長 l 大於 a，故機率為 $\frac{1}{2}$。

2. 隨機端點法

   在圓周上隨機選給兩點，並畫出連接兩點的弦。當此兩點所形成之劣弧大於三分之一圓時，弦長 l 大於 a，故機率為 $\frac{1}{3}$。

3. 隨機中點法

   隨機選取圓內一點，然後畫出以此點為中點的弦。當所選取之點落在半徑為 $\frac{R}{2}$ 的同心圓內部時（換句話說，所選之點距離圓心小於 $\frac{R}{2}$）弦長 l 大於 a，因小圓面積為外接圓面積的 $\frac{1}{4}$，故機率為 $\frac{1}{4}$。

上述三種方法，做出三種不同的答案來，究竟哪個方法才是對的呢？

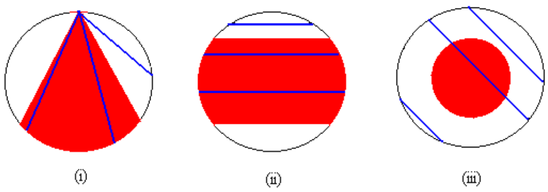

Figure 1: 伯特蘭悖論的三種方法

很不幸地，三個方法都是對的。這個問題是有名的伯特蘭悖論 (Bertrand's paradox)，這個悖論告訴我們，處理機率問題不可過度仰賴直觀、含糊不清，須用更嚴謹的數學手法來處理機率。以本問題來說，「在圓內隨機作一弦」其實是語意不明的，因為它沒告訴我們究竟如何個隨機法，於是我們可以提出三種合理的隨機方法，給出三個不同的答案。

在一兩百年前，數學家面對機率問題經常飽受這類悖論的攻擊。為解決此種曖昧不明，數學家便用了比較抽象化、形式化的方式來建立機率論。而其中一個概念，就是隨機變數。

何謂隨機變數呢？當我們做一個隨機試驗，我們將各種試驗結果賦予數值。比方說丟銅板一次，那麼結果就有：{正,反}，我們說正面是 $X = 1$，反面是 $X = 0$。如果這是個出現正面機率為 $\frac{1}{3}$ 的不公正銅板，我們就寫下

$$P(X = 1) = \frac{1}{3}, \ P(X = 0) = \frac{2}{3}$$

又如數學老師讓電腦隨機從 1 到 100 選一個數當作你的學期成績，如果我們只關心 pass 與否，可以用 $X = 1$ 代表及格、$X = 0$ 代表不及格。則

$$P(X = 1) = \frac{41}{100}, \ P(X = 0) = \frac{59}{100}$$

如果我們關心精確的分數，就可以將隨機變數 Y 定為分數，則

$$P(Y = 70) = \frac{1}{100}, \ P(Y \geq 60) = \frac{41}{100}, \ P(80 < Y \leq 90) = \frac{10}{100}$$

綜觀以上，使用隨機變數帶來兩個好處。第一，將各種不同的試驗結果簡潔地化約成數值。不管你是丟銅板正面反面、隨機成績及格不及格、丟骰子奇數偶數等等，因為機率是很實務的問題，我們可以列出很多不同、令人眼花撩亂的試驗結果，但用隨機變數的語言，可以簡化成 $X = 1, \ X = 0$。第二，同一個隨機試驗，我們可以用不同的觀點來區分試驗結果。就如隨機成績的例子，我們可看及格與否，也可看成績是幾分，不同的觀點，就有不同的隨機變數的設法。

現在回到伯特蘭悖論，我們現在可以用隨機變數來精確描述。設隨機變數 X 為隨機半徑法中的弦心距、隨機變數 Y 為隨機端點法中，兩點所成劣弧長佔圓周長的比例、隨機變數 Z 為隨機中點法中，所選之點到圓心的距離。則

$$P\left(X < \frac{R}{2}\right) = \frac{1}{2}, \ P\left(Y > \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}, \ P\left(Z < \frac{R}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

現在這樣看起來，這三種答案看來就不那麼矛盾，因為它們算的是不同的隨機變數！而在問機率問題時，也理應敘述清楚，讓讀題者明白所欲求的究竟是怎樣的隨機法，使答題時可以明確列出隨機變數，不可含糊不清！

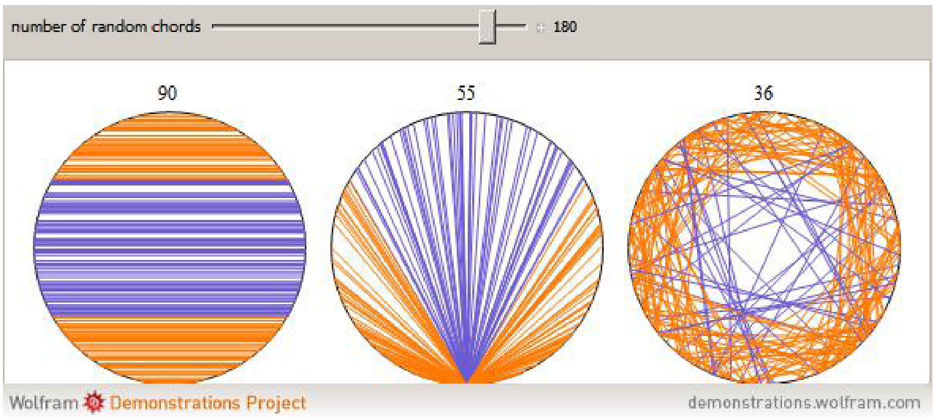

Figure 2: 電腦模擬伯特蘭悖論的三種方法